I LIMITI DELLE FUNZIONI

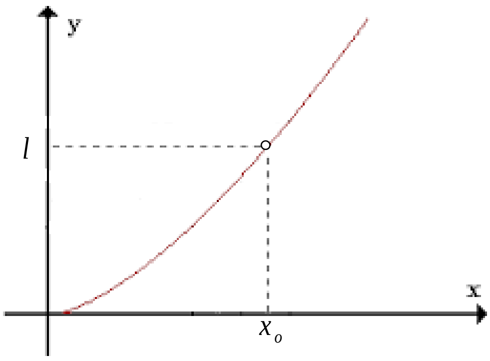
1. Il concetto intuitivo di limite.
2. La definizione rigorosa di limite.
3. L’infinito matematico e le sue proprietà.
4. Il limite finito di una funzione in un punto.
5. Il limite infinito di una funzione in un punto.
6. Il limite finito di una funzione all’infinito.
7. Il limite infinito di una funzione all’infinito.
8. Calcolo dei limiti delle funzioni razionali.
9. Limite destro e limite sinistro di una funzione in un punto.
10. Teorema dell’unicità del limite con dimostrazione.
11. Teorema del confronto.
12. Teorema della permanenza del segno.
13. I teoremi sulle operazioni con i limiti.
14. Le forme indeterminate dei limiti.
15. Calcolo di alcuni limiti in forma indeterminata.
16. Calcolo degli asintoti verticali e orizzontali di una funzione.
17. Studio approssimato del grafico di una funzione.
18. Calcolo dei limiti con l’uso di Geogebra.

1. Il concetto intuitivo di limite.

Il limite è un'**operazione matematica** che permette di stabilire a quale valore si avvicina una funzione *f(x)* quando la variabile *x* tende ad un certo valore x_o .

Se per *x* che tende al valore x_o la funzione $f(x)$ si avvicina al valore *l*, si scrive: $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$

che si legge: limite per *x* che tende ad x_o , di effe di *x*, uguale *l*, e vuol dire che quanto più la variabile *x* si avvicina al valore x_o , tanto più la funzione $f(x)$ si avvicina al valore *l*.



Il calcolo del limite è importante per sapere a quale valore si avvicina la funzione quando la variabile *x* tende a $+\infty$ o a $-\infty$ o a quei punti del dominio in cui la funzione è discontinua e il suo grafico si interrompe.

Per esempio la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ ha dominio $D = R - \{2\}$ e perciò per $x = 2$ non si può calcolare il valore della funzione ma, per tracciare bene il grafico di $f(x)$, è importante sapere, quando la *x* tende al valore 2, a quale valore si avvicina la funzione.

È utile notare che un calcolo approssimato del limite si può anche effettuare utilizzando una calcolatrice e sostituendo al posto di *x* una valore abbastanza vicino al numero 2, per esempio 1,999 oppure 2,001.
Come risultato si ottiene però solo un numero decimale approssimato, e non un valore preciso sotto forma di frazione o di radicale.

VIDEOLEZIONE SUI LIMITI

2. La definizione rigorosa di limite.

In termini più rigorosi, la scrittura: $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ significa che la distanza tra il valore della funzione $f(x)$ e il limite l si può rendere piccola a piacere, più piccola di qualunque numero ε arbitrariamente scelto, se si prende un valore di x in un certo intorno di x_o, abbastanza vicino ad x_o, ma con $x \neq x_o$.
Questa definizione rigorosa di limite simbolicamente si esprime così:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \; \mathrm{I}(x_o) \, / \, \forall \, x \in \mathrm{I}(x_o) - x_o : \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

Secondo i valori che possono assumere il punto x_o e il limite l, che possono essere finiti o infiniti, si possono avere quattro casi diversi di limite:

a) limite finito di una funzione in un punto: $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$

b) limite infinito di una funzione in un punto: $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$

c) limite finito di una funzione all'infinito: $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

d) limite infinito di una funzione all'infinito: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Nello studio dei limiti bisogna saper fare essenzialmente due cose:

a) **Verificare** se il valore di un limite è vero, applicando la definizione di limite.

b) **Calcolare** un limite quando non se ne conosce il valore.

Approfondimenti sul concetto di infinito:

L'INFINITO MATEMATICO

IL CONCETTO DI INFINITO

L'INFINITO MATEMATICO E DINTORNI

L'INFINITO IN MATEMATICA

LA MATEMATICA DELL'INFINITO

LA MATEMATICA E L'INFINITO

3. L’infinito matematico e le sue proprietà.

Nel mondo antico, popoli come quello babilonese o egizio non presero mai in esame l’infinito, non per mancanza di capacità intellettuali, ma semplicemente per il fatto che nei loro problemi pratici l’infinito non compariva, né destava interesse. Fu invece nell’antica Grecia che grandi matematici e filosofi, come Pitagora, Parmenide, Platone, Zenone, Euclide cominciarono a dibattere e ad interrogarsi sul concetto di infinito. Sarà necessario attendere l’età moderna affinché tale concetto venga affrontato seriamente e adeguatamente; è tuttavia interessante osservare come questo concetto sia sempre stato trattato non solo da un punto di vista prettamente matematico, ma abbia sempre avuto risvolti filosofici e teologici, rispecchiando la concezione che l’uomo aveva di se stesso.
Nello studio della matematica il concetto di infinito sale prepotente alla ribalta quando si affronta il calcolo dei limiti, per cui è necessario conoscerlo meglio prima di affrontare questo lavoro.
L’infinito in matematica si indica col simbolo ∞, detto lemniscata, e non ha una definizione precisa (come il concetto di retta nella geometria), ma è un concetto abbastanza intuitivo che ciascuno di noi ha dentro di se.
Possiamo dire che esso rappresenta una quantità molto grande, più grande di qualunque numero che ciascuno di noi può immaginare. Esso possiede le seguenti proprietà:

a) $\forall a \in R : a + \infty = \infty$

b) $\forall a \in R : a - \infty = -\infty$

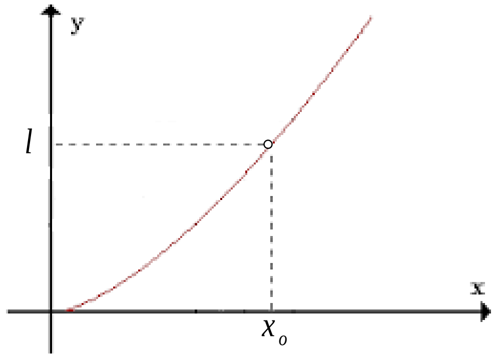
c) $\forall a \in R_0 : a \cdot \infty = \infty$

d) $\forall a \in R : \dfrac{a}{\infty} = 0$

e) $\forall a \in R : \dfrac{\infty}{a} = \infty$

4. Il limite finito di una funzione in un punto. **APPROFONDIMENTO**

Sia $f : D \to C$ una funzione reale di variabile reale e sia x_o un punto di accumulazione di D che non necessariamente appartiene a D.



Si dice che per x tendente al punto x_o la funzione $f(x)$ tende al limite finito l, e si scrive: $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$
quando, per x molto vicino a x_o, ma $x \neq x_o$, risulta che $f(x)$ è molto vicina al valore l.

Questo concetto si esprime rigorosamente in questo modo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \; \mathrm{I}(x_o) \, / \, \forall \, x \in \mathrm{I}(x_o) - \{x_o\} : \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

Esercizio 1. Applicando la definizione di limite, stabilire se: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$

Bisogna vedere se: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \; \mathrm{I}(1) \, / \, \forall \, x \in \mathrm{I}(1) - \{1\} : \left| \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon$

Se risolvendo questa disequazione si trova come soluzione **un intorno di 1** significa che il limite è vero altrimenti, se la disequazione non ha soluzioni oppure ha come soluzione un intervallo che non contiene il punto 1, si conclude che il limite non è vero.

$$\left| \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 + x - 2 - 3x + 3}{x - 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

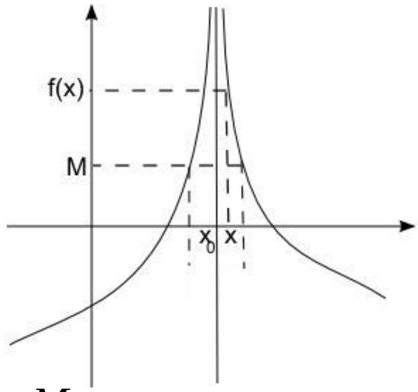
$$\Rightarrow \left| \frac{(x-1)(x-1)}{x - 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$$

Questo è l'intorno di 1 per ogni x del quale, escluso $x = 1$, risulta $|f(x) - 3| < \varepsilon$.
Pertanto il limite proposto è vero.

5. Il limite infinito di una funzione in un punto.

Sia $f: D \to C$ una funzione reale di variabile reale e sia x_o un punto di accumulazione di D che non necessariamente appartiene a D. Quando la variabile *x* tende ad un valore finito e la funzione tende all'infinito si possono presentare due casi.

1° caso con il limite uguale a $+\infty$



Si dice che per *x* tendente al punto x_o la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$,

e si scrive: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$

quando, per *x* molto vicino a x_o, ma $x \neq x_o$, risulta che $f(x)$ diventa

molto grande, più grande di qualunque numero positivo *M*.

Questo concetto si esprime rigorosamente in questo modo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \ \mathrm{I}(x_o) / \forall x \in \mathrm{I}(x_o) - \{x_o\}: f(x) > M$$

Quando $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ si dice che la retta verticale di equazione $x = x_o$ è un asintoto verticale verso l'alto della funzione *f(x)*.

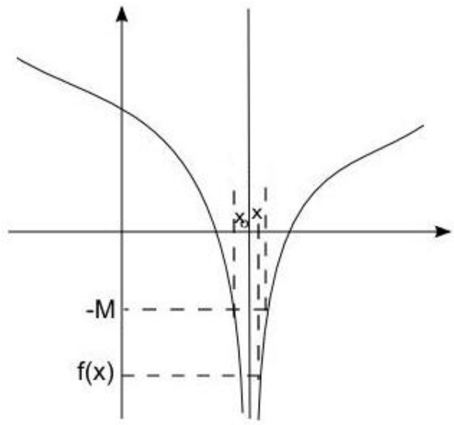
Esercizio1 Stabilire se: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Dobbiamo vedere se: $\forall M > 0 \exists I(0) / \forall x \in I(0) - \{0\}: f(x) > M$

Cioè se $\dfrac{1}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \dfrac{1}{M} \Rightarrow x^2 - \dfrac{1}{M} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{M}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow 0 - \dfrac{1}{\sqrt{M}} < x < 0 + \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

Questo è l'intorno di 0, $\forall x$ del quale, escluso $x = 0$ risulta $f(x) > M$

2° caso con il limite uguale a $-\infty$



Si dice che per *x* tendente al punto x_o la funzione $f(x)$ tende a $-\infty$,

e si scrive: $\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty$

quando, per *x* molto vicino a x_o , ma $x \neq x_o$, risulta che $f(x)$ diventa molto piccolo, più piccolo di qualunque numero negativo - *M*.

Questo concetto si esprime rigorosamente in questo modo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists\ \mathrm{I}(x_o) / \forall x \in \mathrm{I}(x_o) - \{x_o\}: f(x) < -M$$

Quando $\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty$ si dice che la retta verticale di equazione $x = x_o$ è un asintoto verticale verso il basso della funzione *f(x)*.

Esercizio1 Stabilire se: $\lim_{x \to 0} \frac{-3}{x^2} = -\infty$

Dobbiamo vedere se: $\forall M > 0 \exists I(0) / \forall x \in I(0) - \{0\}: f(x) < -M$

Cioè se

$$\frac{-3}{x^2} < -M \Rightarrow \frac{3}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \frac{3}{M} \Rightarrow x^2 - \frac{3}{M} < 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{M}} < x < \sqrt{\frac{3}{M}} \Rightarrow 0 - \sqrt{\frac{3}{M}} < x < 0 + \sqrt{\frac{3}{M}}$$

Questo è l’intorno di 0, $\forall x$ del quale, escluso $x = 0$ risulta $f(x) < -M$

6. Il limite finito di una funzione all'infinito.

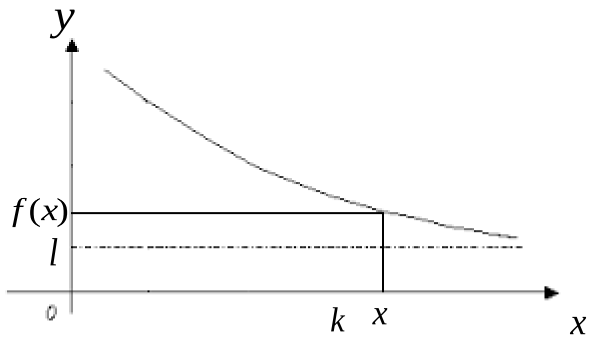
Sia $f:D \to C$ una funzione reale di variabile reale. Quando la variabile *x* tende all'infinito e la funzione tende ad un valore finito si possono presentare due casi.

1° caso con $x \to +\infty$

Si dice che per $x \to +\infty$ la funzione *f(x)* tende al limite *l*,

e si scrive: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

quando, per *x* molto grande, cioè superiore ad un certo numero positivo *k* , risulta che $f(x)$ è molto vicina al valore *l*.



Questo concetto si esprime rigorosamente in questo modo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \; k > 0 \, / \, \forall \, x > \mathrm{k} : \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

Quando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ si dice che la retta orizzontale di equazione $y = l$ è un asintoto orizzontale destro della funzione *f(x)*.

Esercizio 1. Applicando la definizione di limite, stabilire se: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+4}{2x^2+1} = \dfrac{3}{2}$

Bisogna vedere se: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \; k > 0 \, / \, \forall \, x > k : \left| \dfrac{3x^2+4}{2x^2+1} - \dfrac{3}{2} \right| < \varepsilon$

Cioè $$\left| \frac{6x^2+8-6x^2-3}{2(2x^2+1)} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{5}{2(2x^2+1)} \right| < \varepsilon$$

Essendo la quantità in valore assoluto sempre positiva, abbiamo:

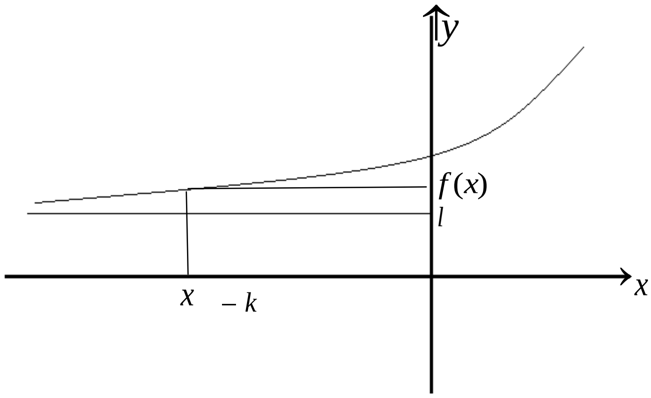
$$\frac{5}{2(2x^2+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2x^2+1 > \frac{5}{2\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow 2x^2 > \frac{5}{2\varepsilon} - 1 \Rightarrow x^2 > \frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -\sqrt{\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}} \cup x > \sqrt{\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

Siccome $x \to +\infty$, essa è positiva e si prende la soluzione: $x > \sqrt{\dfrac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}}$

$\sqrt{\dfrac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}}$ è il numero $k > 0$ tale che $\forall \, x > k : \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$

2° caso con $x \to -\infty$



Si dice che per $x \to -\infty$ la funzione *f(x)* tende al limite *l*,

e si scrive: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

quando, per *x* molto piccola, cioè inferiore ad un certo numero negativo $-k$, risulta che $f(x)$ è molto vicina al valore *l*.
Questo concetto si esprime simbolicamente in questo modo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists\ k > 0 / \forall x < -k : |f(x) - l| < \varepsilon$$

Quando $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si dice che la retta orizzontale di equazione $y = l$ è un **asintoto orizzontale sinistro** della funzione *f(x)*.

Esercizio 2. Applicando la definizione di limite, verificare che: $\lim_{x \to -\infty} 3^x = 0$

Bisogna vedere se: $\forall \varepsilon > 0 \exists\ k > 0 / \forall x < -k : |f(x) - l| < \varepsilon$

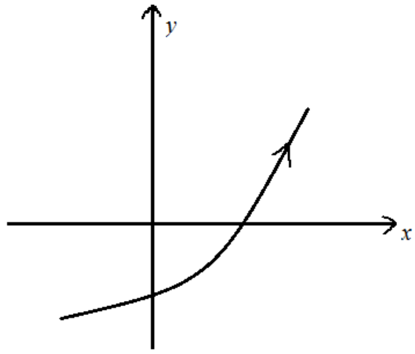
Cioè $|3^x - 0| < \varepsilon \Rightarrow |3^x| < \varepsilon$ Essendo $3^x > 0$ risulta: $3^x < \varepsilon \Rightarrow$

$$\log_3 3^x < \log_3 \varepsilon \Rightarrow x < \log_3 \varepsilon \Rightarrow x < \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \Rightarrow x < -\log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$\log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ è il numero $k > 0$ tale che $\forall x < -k : |f(x) - l| < \varepsilon$

7. Il limite infinito di una funzione all'infinito.

Sia $f:D\to C$ una funzione reale di variabile reale. Quando la variabile *x* tende all'infinito e anche la funzione *f(x)* tende all'infinito, si possono presentare quattro casi.



1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\, \exists k>0 / \forall x>k: f(x)>M$

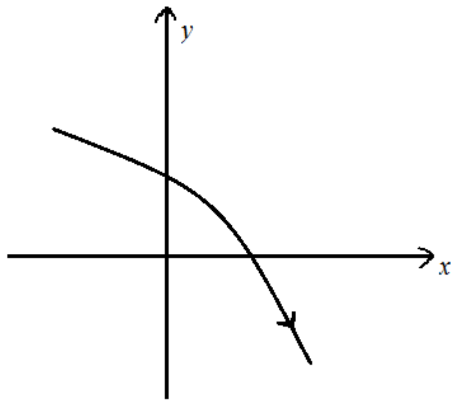
Cioè quando la *x* è abbastanza grande, più grande di un certo numero positivo *k*, la $f(x)$ diventa molto grande, più grande di qualunque numero positivo *M* scelto a piacere.

Esempio 1. Verificare che: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{3}=+\infty$

Dobbiamo verificare che: $\forall M>0\, \exists k>0 / \forall x>k: \frac{x+2}{3}>M$

$$\frac{x+2}{3}>M \Rightarrow x+2>3M \Rightarrow x>3M-2$$

Il valore $3M-2$ è il numero $k>0$ tale che $\forall x>k: \frac{x+2}{3}>M$



2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0\, \exists k>0 / \forall x>k: f(x)<-M$

Cioè quando la *x* è abbastanza grande, più grande di un certo numero positivo *k*, la $f(x)$ diventa molto piccola, più piccola di qualunque numero negativo -*M* scelto a piacere.

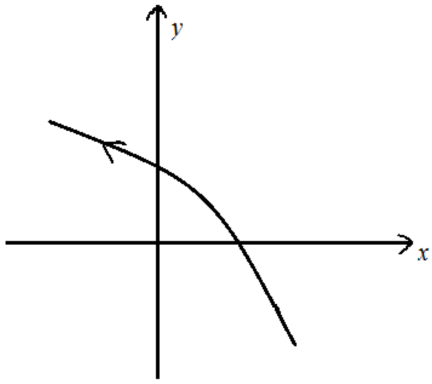
Esempio 2. Verificare che: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-3x}{5}=-\infty$

Dobbiamo verificare che: $\forall M>0\, \exists k>0 / \forall x>k: \frac{2-3x}{5}<-M$

$$\frac{2-3x}{5}<-M \Rightarrow 2-3x<-5M \Rightarrow -3x<-5M-2 \Rightarrow 3x>5M+2 \Rightarrow x>\frac{5M+2}{3}$$

Il valore $\frac{5M+2}{3}$ è il numero $k>0$ tale che $\forall x>k: \frac{2-3x}{5}<-M$

3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\,\exists k>0 / \forall x<-k: f(x)>M$



Cioè quando la *x* è abbastanza piccola, più piccola di un certo numero negativo -*k*, la $f(x)$ diventa molto grande, più grande di qualunque numero positivo *M* scelto a piacere.

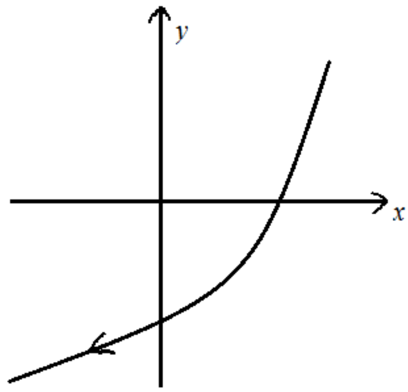
Esempio 3. Verificare che: $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-4x}{5}=+\infty$

Dobbiamo verificare che: $\forall M>0\,\exists k>0/\forall x<-k: \frac{3-4x}{5}>M$

$$\frac{3-4x}{5}>M \Rightarrow 3-4x>5M \Rightarrow -4x>5M-3 \Rightarrow 4x<-5M+3 \Rightarrow x<\frac{-5M+3}{4} \Rightarrow x<-\frac{5M-3}{4}$$

Il valore $\frac{5M-3}{4}$ è il numero $k>0$ tale che $\forall x<-k: \frac{3-4x}{5}>M$

4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0\,\exists k>0 / \forall x<-k: f(x)<-M$



Cioè quando la *x* è abbastanza piccola, più piccola di un certo numero negativo -*k*, la $f(x)$ diventa molto piccola, più piccola di qualunque numero negativo - *M* scelto a piacere.

Esempio 4. Verificare che: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-6}{3}=-\infty$

Dobbiamo verificare che: $\forall M>0\,\exists k>0/\forall x<-k: \frac{2x-6}{3}<-M$

$$\frac{2x-6}{3}<-M \Rightarrow 2x-6<-3M \Rightarrow 2x<-3M+6 \Rightarrow x<\frac{-3M+6}{2} \Rightarrow x<-\frac{3M-6}{2}$$

Il valore $\frac{3M-6}{2}$ è il numero $k>0$ tale che $\forall x<-k: \frac{2x-6}{3}<-M$

8. Calcolo dei limiti delle funzioni razionali.

Il calcolo dei limiti si effettua sostituendo nella funzione al posto di x il valore a cui essa tende.

Esempio 1. Calcolare $\lim_{x \to 2}(5x+1) = 5 \cdot 2 + 1 = 10 + 1 = 11$

Esempio 2. Calcolare $\lim_{x \to +\infty}(2x^2 + 4x) = 2 \cdot \infty^2 + 4 \cdot \infty = \infty + \infty = \infty$

Esempio 3. Calcolare $\lim_{x \to +\infty}(x^2 - 3x) = \infty^2 - 3 \cdot \infty = \infty - \infty =$ forma indeterminata,

cioè il risultato può essere qualunque valore, perché qualunque numero sommato col sottraendo dà come risultato il minuendo. Per eliminare l'indeterminazione si raccoglie a fattore comune la x col massimo esponente e poi si ricalcola il limite.

$$\lim_{x \to +\infty}(x^2 - 3x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \infty^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{\infty}\right) = \infty \cdot (1-0) = \infty \cdot 1 = \infty$$

Esempio 4. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{5x+2} = \frac{2 \cdot \infty + 3}{5 \cdot \infty + 2} = \frac{\infty}{\infty} =$ forma indeterminata,

cioè il risultato può essere qualunque valore, perché qualunque numero moltiplicato col divisore, dà come risultato il dividendo. Per eliminare l'indeterminazione si raccoglie a fattore comune la x col massimo esponente sia al numeratore che al denominatore, poi si semplifica e si ricalcola il limite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{5x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(5 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{2 + \frac{3}{\infty}}{5 + \frac{2}{\infty}} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}$$

9. Limite destro e limite sinistro di una funzione in un punto.

A volte il limite per $x \to x_o$ di una funzione $f(x)$ può essere diverso se la variabile x tende al valore x_o da destra, cioè da valori più grandi di x_o e indicati con x_o^+, oppure da sinistra, cioè da valori più piccoli di x_o e indicati con x_o^-. In tal caso è necessario calcolare entrambi i limiti, che si chiamano **limite destro** e **limite sinistro** della funzione nel punto x_o.

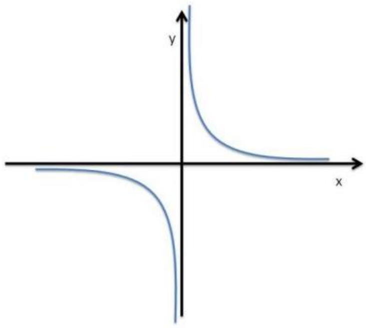
Se per $x \to x_o$ il limite destro e il limite sinistro di una funzione $f(x)$ sono **uguali tra loro**, si dice che per $x \to x_o$ la funzione **ha il limite**, e il suo valore è uguale allo stesso valore dei limiti destro e sinistro.

Se per $x \to x_o$ il limite destro e il limite sinistro sono **diversi tra loro**, oppure qualcuno dei due non esiste, si dice che per $x \to x_o$ la funzione $f(x)$ **non ha il limite**.

Esempio 1. Calcolare il limite: $\lim_{x \to 0} \frac{2}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} = \frac{2}{0} = \infty$ il limite può essere $+\infty$ o $-\infty$ a seconda che $x \to 0$ da destra oppure da sinistra.

Perciò bisogna calcolare entrambi i limiti.



Limite destro. $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Limite sinistro. $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, la funzione $f(x) = \frac{2}{x}$ non ha il limite per $x \to 2$.

Esempio 2. Calcolare il limite: $\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0} = \infty$$

Il limite può essere $+\infty$ o $-\infty$ a seconda che $x \to 0$ da destra oppure da sinistra.

Perciò bisogna calcolare entrambi i limiti.

Limite destro: $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{1^+ + 3}{1^+ - 1} = \frac{4^+}{0^+} = +\infty$

Limite sinistro $\lim_{x \to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{1^- + 3}{1^- - 1} = \frac{4^-}{0^-} = -\infty$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, la funzione $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ non ha il limite per $x \to 1$.

Esempio 3. Stabilire se la funzione $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ ha il limite per $x \to 0$

Bisogna calcolare il limite destro e sinistro della funzione $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$ e vedere se sono uguali.

Limite destro: $\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty$

Limite sinistro: $\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, la funzione $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ non ha il limite per $x \to 0$.

10. Teorema dell'unicità del limite con dimostrazione.

Se per $x \to x_o$ la funzione $f(x)$ tende al limite *l*, tale limite è unico.
Dimostrazione per assurdo. Supponiamo che ci siano due limiti diversi: l_1 e l_2 con $l_1 < l_2$.
Per l'esistenza del limite l_1 abbiamo:

11. Teorema del confronto.

12. Teorema della permanenza del segno.

13. I teoremi sulle operazioni con i limiti.

Sono alcuni teoremi che ci permettono di calcolare i limiti di funzioni più complesse.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni reali di variabile reale tali che:

$\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_o} g(x) = l'$ allora valgono i seguenti teoremi:

1) **Il limite della somma** di due funzioni è uguale alla somma dei limiti delle funzioni,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] = l + l'$$

2) **Il limite del prodotto** di due funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle funzioni,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot l'$$

3) **Il limite del quoziente** di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti delle funzioni, se il secondo limite è diverso da zero,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'} \quad \text{se } l' \neq 0$$

4) **Il limite di una costante per una funzione** è uguale alla costante per il limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} [a \cdot f(x)] = a \cdot l$$

5) **Il limite di una combinazione lineare di funzioni** è uguale alla combinazione lineare dei limiti:

$$\lim_{x \to x_o} [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)] = a \cdot l + b \cdot l'$$

6) **Il limite del reciproco di una funzione** è uguale al reciproco del limite, se tale limite è diverso da zero,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l} \quad \text{se } l \neq 0$$

7) **Il limite del valore assoluto di una funzione** è uguale al valore assoluto del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} |f(x)| = |l|$$

8) **Il limite della potenza di una funzione** è uguale alla potenza del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} [f(x)]^n = l^n$$

9) **Il limite della radice di una funzione** è uguale alla radice del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

10) **Il limite dell’esponenziale di una funzione** è uguale all’esponenziale del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} a^{f(x)} = a^l$$

11) **Il limite del logaritmo di una funzione** è uguale al logaritmo del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} \log_a f(x) = \log_a l$$

12) **Il limite del seno di una funzione** è uguale al seno del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} sen[f(x)] = sen\, l$$

13) **Il limite del coseno di una funzione** è uguale al coseno del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} \cos[f(x)] = \cos l$$

14) **Il limite della tangente di una funzione** è uguale alla tangente del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} tg[f(x)] = tg\, l$$

15) **Il limite della cotangente di una funzione** è uguale alla cotangente del limite della funzione,

cioè: $$\lim_{x \to x_o} ctg[f(x)] = ctg\, l$$

Per calcolare i limiti delle funzioni più complesse dovremmo applicare, uno alla volta, tutti questi teoremi sulle operazioni con i limiti e procedere come nel seguente esempio:

$$\lim_{x \to 4}(x^2 + 2\sqrt{x}) = \lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} 2\sqrt{x} = \left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 + 2 \cdot \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 4^2 + 2 \cdot \sqrt{\lim_{x \to 4} x} =$$

$$= 16 + 2 \cdot \sqrt{4} = 16 + 2 \cdot 2 = 16 + 4 = 20$$

In pratica , però, quando calcoliamo il limite di una funzione così complessa, applichiamo tutti questi teoremi contemporaneamente, sostituendo dappertutto e contemporaneamente al posto di *x* il valore a cui essa tende, procedendo in questo modo molto più rapido:

$$\lim_{x \to 4}(x^2 + 2\sqrt{x}) = 4^2 + 2 \cdot \sqrt{4} = 16 + 2 \cdot 2 = 16 + 4 = 20$$

Questi teoremi però sono importanti perché ci garantiscono che il risultato ottenuto è corretto.

14. Le forme indeterminate di un limite.

Sono espressioni matematiche che si possono ottenere calcolando un limite e che possono avere come risultato un valore qualsiasi. Per calcolare il valore corretto bisogna analizzare attentamente il limite e utilizzare delle strategie diverse da caso a caso.
Le principali forme indeterminate sono sette:

$$\infty-\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\cdot\infty \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

Prima di imparare le strategie per risolvere queste forme indeterminate è importante capire perché queste espressioni possono assumere qualsiasi valore, in modo che lo studente poco esperto non venga portato fuori strada e sia indotto ad una errata valutazione dell'espressione.

1) La differenza $\infty-\infty$ non è uguale a zero, come si potrebbe pensare, ma può essere uguale a qualsiasi valore, poiché qualunque numero sommato col sottraendo dà come risultato il minuendo.

2) Il quoziente $\frac{\infty}{\infty}$ non è uguale a uno, come si potrebbe pensare, ma può essere uguale a qualsiasi valore, poiché qualunque numero moltiplicato col divisore dà come risultato il dividendo.

3) Il quoziente $\frac{0}{0}$ non è uguale a uno, come si potrebbe pensare, ma può essere uguale a qualsiasi valore, poiché qualunque numero moltiplicato col divisore dà come risultato il dividendo.

4) Il prodotto $0\cdot\infty$ non è uguale a zero, come si potrebbe pensare. Dobbiamo ricordare che nel calcolo del limite il simbolo 0 non vale esattamente zero, ma un numero molto piccolo che tende a zero. Siccome un numero molto piccolo è uguale al reciproco di un numero molto grande , si può scrivere:

$$0\cdot\infty=\frac{1}{\infty}\cdot\infty=\frac{\infty}{\infty}$$

che è una delle forme indeterminate precedenti e perciò può assumere qualsiasi valore.

5) La potenza 0^0 non è uguale a uno, come si potrebbe pensare. Infatti si può scrivere:

$$0^0=0^{2-2}=\frac{0^2}{0^2}=\frac{0}{0}$$

che è una delle forme indeterminate precedenti e perciò può assumere qualsiasi valore.

6) La potenza 1^∞ non è uguale a uno, come si potrebbe pensare. Infatti si può scrivere:

$$1^\infty=\left(\frac{2}{2}\right)^\infty=\frac{2^\infty}{2^\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

che è una delle forme indeterminate precedenti e perciò può assumere qualsiasi valore.

7) La potenza ∞^0 non è uguale a uno, come si potrebbe pensare. Infatti si può scrivere:

$$\infty^0=\infty^{2-2}=\frac{\infty^2}{\infty^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

che è una delle forme indeterminate precedenti e perciò può assumere qualsiasi valore.

15. Calcolo di alcuni limiti in forma indeterminata.

Calcolare i seguenti limiti:

Esempio 1. $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

Sostituendo alla variabile *x* il valore 1 si ottiene: $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{1^2+1-2}{1^2-1}=\frac{0}{0}$ forma indet.

Per risolvere la forma indeterminata possiamo utilizzare il teorema di Ruffini, il quale afferma che se un polinomio si annulla per *x* uguale ad un certo valore *a*, allora esso è divisibile per $x-a$.
In questo caso per $x=1$ si annulla sia il N che il D per cui sono entrambi divisibili per $x-1$.
Effettuando la divisione si ottiene:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Esempio 2. $\lim_{x\to0}\frac{sen\,x}{1-\cos x}=\frac{sen\,0}{1-\cos 0}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$

Possiamo moltiplicare N e D per $1+\cos x$ e otteniamo:

$$\lim_{x\to0}\frac{sen\,x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{sen\,x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{sen\,x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{sen\,x(1+\cos x)}{sen^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{sen\,x}=\frac{1+\cos 0}{sen\,0}=\frac{1+1}{0}=\frac{2}{0}=\infty$$

Esempio 3. $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}$

Possiamo moltiplicare N e D per $\sqrt{x}+\sqrt{2}$. Si ottiene:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}=\lim_{x\to2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

16. Calcolo degli asintoti verticali e orizzontali di una funzione.
17. Studio approssimato del grafico di una funzione.
18. Calcolo dei limiti con l'uso di Geogebra.